

0.1 Homotopy pull back

push out の双対的な考えなので紹介だけ。 $D = \{a \longrightarrow b \longleftarrow c\}$ とおいておく。

Remark 0.1.1

model 圏 C において、 $X \in C^D$ は $X(a) \longrightarrow X(b) \longleftarrow X(c)$ の図式の事である。また $f \in \text{Hom}_{C^D}(X, Y)$ は natural transformation であり、

$$\begin{array}{ccccc} X(a) & \longrightarrow & X(b) & \longleftarrow & X(c) \\ f_a \downarrow & & f_b \downarrow & & f_c \downarrow \\ Y(a) & \longrightarrow & Y(b) & \longleftarrow & Y(c) \end{array}$$

を可換にする morphism の組 (f_a, f_b, f_c) であり、 $\delta_a(f), \delta_c(f)$ を、

$$\begin{array}{ccc} \delta_a(f) & \longrightarrow & X(b) \\ \downarrow & & \downarrow f_b \\ Y(a) & \longrightarrow & Y(b) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X(b) & \longleftarrow & \delta_c(f) \\ f_b \downarrow & & \downarrow \\ Y(b) & \longleftarrow & Y(c) \end{array}$$

で与えられる pull back とする。このとき、pull back の性質から、

$$p_a(f) : X(a) \longrightarrow \delta_a(f), \quad p_c(f) : X(c) \longrightarrow \delta_c(f)$$

が導かれる。ついでに $p_b(f) = f_b : X(b) \longrightarrow Y(b)$ とおいておく。

MC1 により、この図式の pull back が存在する。pull back を対応させることは、

$$\lim : C^D \longrightarrow C$$

を考える事である。今までの話で Derived functor を考えたいのなら C^D も model 圏でありたい。

Proposition 0.1.2

model 圏 C において、 $f \in \text{Hom}_{C^D}(X, Y)$ において、

1. f が weak equivalence であるとは f_a, f_b, f_c がすべて weak equivalence とする。

2. f が fibration であるとは $p_a(f), p_b(f), p_c(f)$ がすべて fibration とする。
3. f が cofibration であるとは f_a, f_b, f_c がすべて cofibration とする。

と定義すればこれにより C^D は model 圏である。

Proposition 0.1.3

C をモデル圏とする。

$$\lim : C^D \longrightarrow C$$

に対し、Total right derived fanctor が存在する。

proof) $\Delta : C \Longleftrightarrow C^D : \lim$ であった。このとき、constant fanctor の $\Delta : C \longrightarrow C^D$ は、 Δ は weak equivalence と cofibration を保つ。これにより、total derived fanctor が存在し、

$$\mathbf{L}\Delta : \mathrm{Ho}(C) \Longleftrightarrow \mathrm{Ho}(C^D) : \mathbf{R}\lim$$

を満たす。

この $\mathbf{R}\lim : C^D \longrightarrow C$ を homotopy pull back と呼ぶ。